

# Buzzard-Taylor の解説とその後の発展について

佐々木 秀

## 1 BT とは

そもそも BT [3] とは、強 Artin 予想部分解決のアイデアとして R.Taylor が主導していたプロジェクトの一部を指すものである。着想の原点は「Wiles, Taylor-Wiles による、重さ 2 の保型形式についてのアイデア (MLT=Modular Lifting Theorem) をいかに重さ 1 の保型形式について応用できるのか」と至ってシンプルなものなのだが、これを実際に実行するには肥田理論、Coleman 理論 (および  $p$ -進 geometry) といった非常にテクニカルな理論が必要となる。

この講義録ですべてを完全に理解するためのバックグラウンドまで解説することは不可能なので、上述の諸理論はある程度仮定して

- R.Taylor のプロジェクト、
- Buzzard-Taylor の主定理、証明の概要、
- その後の発展

を 21 世紀の観点 (たとえば [6]) から、より見通しの良い形で説明したい。実際のサマースクールの講義では、サマースクールのテーマであった「 $p$ -進保型形式理論」を強く意識した。より具体的には、肥田理論、Coleman 理論を「 $p$  で不分岐な  $p$ -進 Galois 表現の modularity」にいかに応用することができるのかを解説した一方、 $p$ -進 geometry、及び有限平坦群スキーム理論の深い理解を必要とする Buzzard-Taylor の主定理の証明の詳細にはあえて立ち入らなかった。講義後に予定されていた諏訪湖散策を諦め、会場に残った 10 人程度の熱心な参加者達には、2、3 時間程度立ち入った話を追加講義することができたのだが、この講義録にはそこでの内容も含めている。

R.Taylor のプロジェクトを始め、他の重要な派生問題はすでに (ほぼ) 解決されてしまっているし、そもそもこの研究エリア自体が非常に特殊な問題 (重さ 1 の保型形式についての Galois 表現との対応) を解決するという明確なゴールから遡って発展してきたものなので、なぜ今更? といった疑問にお答えするのが少々難しいが、この講義が各々の新しいアイデアの着想に役立ってくれば良いと思う。

講義後、質問の為に歩み寄ってくれた何人かの参加者達、また前述の「熱心な参加者達」の熱意に感銘を受けた。その一人一人に感謝したい。最後に、講演の機会を下さった山上さん、青木さんに感謝したい。

### 1.1 Artin 予想

$F$  を代数体、 $\bar{F}$  をその代数閉包、 $\text{Gal}(\bar{F}/F)$  を  $F$  の絶対ガロア群とする。

$$\rho : \text{Gal}(\bar{F}/F) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$$

を  $\text{Gal}(\bar{F}/F)$  の  $n$ -次元連続複素表現 (なお、ここで  $\text{Gal}(\bar{F}/F)$  は profinite な、 $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  は discrete な位相を考察することにする) とする。ここで  $\rho^{I_v}$  を  $\rho$  の  $I_v$ -invariant (従って  $D_v/I_v$  の表現)、 $\text{Frob}_v$  を arithmetic な Frobenius とする時、Artin 関数を

$$L(\rho, s) = \prod_v \det(1 - \rho^{I_v}(\text{Frob}_v)(N_{F/\mathbb{Q}v})^{-s})^{-1}$$

で定義する。Artin 予想とはこれが、 $\rho$  が trivial 表現の constituent であったときの  $s = 1$  における pole を除いては、複素平面上 holomorphic であると主張する予想である。Brauer によってすでに  $L(\rho, s)$  が複素平面上 meromorphic である、とは証明されていた。一見、解析的整数論の問題のようにも見えるが、Artin 予想は、次の強 Artin 予想を通して (非常に限定的ながらも) 部分的に解決されてきた。

## 1.2 強 Artin/Artin-Langlands 予想

$\rho$  が可約である場合、Artin 関数はその積となるため、以降  $\rho$  を既約とする。この  $\rho$  に対応する（ここでは  $L$ -関数の一致を意味する） $GL_n(\mathbb{A}_F)$  についての cuspidal automorphic representation が存在することを予想するのが強 Artin 予想である。これは Langlands プログラムの中の Langlands functoriality principle の最も基本的な対応として言い換えることができる。実際に Langlands は、強 Artin 予想を一般化させることを念頭に Langlands functoriality principle を思い立ったと考えられている。90 年代 (pre-Buzzard-Taylor) までには、次のケースの強 Artin 予想が知られていた。

- $n = 1$ , 一般代数体  $F$  (類体論より従う)
- $n = 2, F = \mathbb{Q}$ ,  $\text{proj} \rho : \text{Gal}(\bar{F}/F) \rightarrow GL_2(\mathbb{C}) \rightarrow PGL_2(\mathbb{C}) = GL_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^\times$  の像が soluble であるケース (Langlands の soluble base change 理論より従う)

どちらのケースも  $\rho$  が odd(奇) であるとは仮定されていないことに注目したい。

$F$  が総実体 ( $F = \mathbb{Q}$  のケースも含む)、 $\rho$  が totally odd である場合、強 Artin 予想は重さ 1 の cuspidal (holomorphic) Hilbert modular eigenforms への対応を予想するものである。また、Deligne-Serre や Rogawski-Tunnell による  $\bar{\mathbb{Q}}_p$  上の Galois 表現の構成についての仕事から、ここでいう「対応」とは対応する複素ガロア表現 ( $p$ -進表現の  $\mathbb{C}$  への base-change) が  $\rho$  と一致する「対応」へと主張を強めることができる。そこに  $p$ -進保型理論を応用するためのキーアイデアが隠されている。

BT は  $n = 2, F = \mathbb{Q}$  だが  $\rho$  が odd であって、 $\text{proj} \rho : \text{Gal}(\bar{F}/F) \rightarrow GL_2(\mathbb{C}) \rightarrow PGL_2(\mathbb{C}) = GL_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^\times$  の像が soluble でないケース、すなわち、それが  $A_5$  であるケースを部分的に解決したものである。

## 1.3 BT

まず主定理を述べたい。

**Theorem 1**  $p \geq 5$ ,  $L$  を  $\mathbb{Q}_p$  の有限次拡大体、 $\mathcal{O}$  をその整数環、 $\mathfrak{m}$  を極大イデアル、 $\mathbb{F}$  を剰余体とする。

$$\rho : \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow GL_2(\mathcal{O})$$

を連続既約 2 次元  $p$ -進表現とし、次を仮定する。

- $\rho$  は有限個の素点を除いては不分岐である。
- $\bar{\rho} = (\rho \bmod \mathfrak{m}) : \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow GL_2(\mathbb{F})$  が modular であり (すなわち、ある cuspidal 固有保型形式が存在し、そのガロア表現の mod  $p$  reduction が  $\bar{\rho}$  と同型である)、その  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\zeta_p))$  への制限が絶対既約である ( $\zeta_p$  は 1 の原始  $p$ -乗根)。
- $\rho$  の  $D_p$  への制限が 2 つの 1 次元表現  $\alpha, \beta$  の直和であり、 $\alpha$  と  $\beta$  はともに不分岐だが  $(\alpha \bmod \mathfrak{m}) \neq (\beta \bmod \mathfrak{m})$  である。

このとき、重さ 1 の cuspidal 固有保型形式が存在し、それに対応するガロア表現 (Deligne-Serre, Wiles) が  $\rho$  と一致する。

この定理自体は  $p$ -進ガロア表現についての結果であるので、Deligne-Serre による、重さ 1 の cuspidal 固有保型形式に対応するガロア表現の像の有限性から、Hodge-Tate weight が等しい場合の Fontaine-Mazur 予想を部分的に証明している。

強 Artin 予想を導くには  $\mathbb{C} \simeq \bar{\mathbb{Q}}_p$  を固定し、 $\text{proj} \bar{\rho}$  の像が  $A_5$  であるときに  $\bar{\rho}$  が modular であることを証明しなければならない。必然的に  $p = 2, 5$  となることに注目したい。これは Serre 予想 ( $p = 2, 5$ ) の限定的なケースなのだが、このケースに限っては Shepherd-Barron-Taylor による結果が最初である。ただ、すべての  $\bar{\rho}$  についての modularity が示せるのではなく  $p \in \{2, 5\}$  と 3 で条件付けられている (3 での条件は、Skinner-Wiles の MLT が  $p = 3$  で  $p$ -ordinary かつ「 $p$ -distinguished」のケースのみ MLT が成立していることによるものである。従って、Kisin の MLT と soluble base change を使えばこの条件を取り除くことができるのだが、Kisin の仕事は BT よりずっと後になってからである)。

証明の概要は次のようである。 $p = 5$  を仮定する。まず、有限 soluble な総実体  $F \subset \bar{\mathbb{Q}}$  で、 $\bar{\rho}$  の  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/F)$  への制限が  $GL_2(\mathbb{F}_5)$  に target を持ち、またその determinant が mod 5 cyclotomic 指標になるように選ぶ。保型曲線の Hilbert irreducibility を用いて、 $E$  の 5-torsion  $E[5]$  が  $\bar{\rho}$  の  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/F)$  への制

限と一致するような  $F$  上楕円曲線  $E$  を見つける。その 3-torsion ガロア表現  $E[3]$  の  $GL_2(\mathbb{C})$  へのリフトの像が odd, irreducible, soluble であることから、 $E[3]$  が重さ 1 の保型形式に付随する mod 3 ガロア表現と同型であることをまず示す (' $E[3]$  is modular'). 次に、Skinner-Wiles による MLT を使って  $T_3 E$  が modular であること、Faltings Isogeny Theorem から  $E$  が modular であることを証明する。ここから  $E[5]$ 、すなわち  $\bar{\rho}$  の  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/F)$  への制限が modular であることが導かれる。Ramakrishna-Taylor 理論から  $\bar{\rho}$  の 5-adic リフト  $\rho$  を構成し、再び Skinner-Wiles を使って  $\rho$  の  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/F)$  への制限が modular であることを示す。'Automorphic descent' から  $\rho$  が modular であることが示せ、 $\bar{\rho}$  の modularity が従う。

$p = 2$  のケースでは、2-torsion が  $\bar{\rho}$  と同型となるような  $\mathbb{Z}[(1 + \sqrt{5})/2]$ -Hilbert-Blumenthal Abelian Variety  $A$  を見つけ (CM 理論を使って実際に  $A$  を構成する)、その  $\sqrt{5}$ -torsion が modular であることを先の議論を使って導く。

定理の条件にはそれぞれ理由がある。ここで、ある整数  $N = N(\bar{\rho})$  (Artin conductor; 特に  $p$  は  $N$  を割らない) が存在して、 $\bar{\rho}$  が  $Np$  以外では不分岐であるとする。

0. BT の本質的な議論は  $p \geq 5$  によらない (Taylor-Wiles の議論にこの条件を必要としている)。Taylor のプロジェクトの集大成である Buzzard–Dickinson–Shepherd–Barron–Taylor [4] では、強 Artin 予想への応用に必要なすべてのパーツを  $p = 2$  で書き換えている。

1.  $\phi$  を  $D_p$  の不分岐な指標、 $R = R(\bar{\rho}, \phi)$  を  $\bar{\rho}$  の  $p$ -ordinary かつ、その 1次元 quotient に  $D_p$  が  $\phi$  で作用している deformation の universal ring,  $h = h(N) = h(\Gamma_1(Np^\infty))$  をすべての自然数  $n$  についての Hecke operator  $T_n$  で生成される Hida Hecke  $\Lambda$ -algebra とし、その  $\bar{\rho}$  に対応する  $h$  の極大イデアル、すなわち

- $Np$  と素である素数  $Q$  について
  - $T_Q - \text{tr}\bar{\rho}(\text{Frob}_Q)$ ,
  - $QS_Q - \det\bar{\rho}(\text{Frob}_Q)$
- $N$  を割る素数  $Q$  について  $U_Q$
- $U_p - \bar{\phi}(\text{Frob}_p)$

で生成される極大イデアルでの局所完備化を  $T = T(\bar{\rho}, \phi)$  とするとき、 $\Lambda$ -algebra 同型

$$\gamma : R \simeq T$$

が成り立つ。ここで

$$\Lambda := \mathbb{Z}_p[[1 + p\mathbb{Z}_p]]$$

とし、 $u = 1 + p \in (1 + p\mathbb{Z}_p)$  とした時、 $\Lambda \simeq \mathbb{Z}_p[[u - 1]]$  である。また、Diamond 作用素

$$\langle \rangle : (\mathbb{Z}/Np\mathbb{Z})^\times \times (1 + p\mathbb{Z}_p) \simeq \mathbb{Z}_p^\times \times (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \rightarrow h$$

の  $(1 + p\mathbb{Z}_p)$  のファクターを通して  $h$  は  $\Lambda$  加群となっている。

$\gamma$  の同型性、すなわち「 $R = T$  (in families)」の証明方法はいくつか知られているが、pre-Kisin では次の方法がある。縦を重さ 2 への specialisation map とすると、可換図式

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\gamma} & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_2 & \longrightarrow & T_2 \end{array}$$

が成り立つ。そして

- 肥田理論から  $T$  は  $\Lambda$ -torsion free である。
- Wiles, Taylor-Wiles により  $R_2 \rightarrow T_2$  が同型である (ここに  $p \geq 5$  であること、 $\bar{\rho}|_{\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\zeta_p))}$  が絶対既約であることが使われている。 $p = 3$  に拡張するには  $\bar{\rho}$  が  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\sqrt{-3}))$  から誘導されているケースを除けば良い。 $p = 2$  に拡張するには ' $\bar{\rho}$  is odd' 条件を追加しなければならない。 $\bar{\rho}|_{\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}(\zeta_p))}$  への絶対既約条件は Taylor-Wiles method には必要な条件で、これを除くには Skinner-Wiles の議論の拡張が必要)。

これらから  $\ker(\gamma : R \rightarrow T)$  が 0 であることが証明できる。

2.  $R$  の重さ 1 への二つの specialisation が overconvergent (companion) であることを証明する。

3. これらが  $U_p$  について non-zero な固有値を持つ ( $p$  で ordinary であることから従う) ことから、supersingular annuli へと延長することができ (後述の 'analytic continuation'), そこで二つの specialisation を貼り合わせるができることを導く (この議論には  $p$  で Iwahori レベル付きの保型曲線を使う)。貼り合わせには overconvergent 保型形式の  $q$ -展開を見るのだが、その係数は Hecke 固有値によって一意に定まっていること ('strong multiplicity one') に注目したい。

以下に 2 と 3 を詳しく説明したい。

$N \geq 4$  を  $p$  と素な整数とし、レベル  $N$  の overconvergent 保型形式をまず定義したい。

$X_N$  を  $\mathbb{Z}_p$  上定義される

- $\mathbb{Z}_p$ -スキーム上定義された楕円曲線  $E$
- 群スキーム射  $i : \mu_N \hookrightarrow E[N]$

の組を閉点を持つ保型曲線の compactification とし、その Raynaud generic fibre を  $X_N^{R-a}$  とする。

ここで  $\zeta$  を  $X_N^{R-a}$  の non-cuspidal な点、またそれによって  $\mathcal{O}_K$  上定義される  $X_N$  の閉点 ( $K$  は  $L$  の有限次拡大体で、 $\zeta$  は  $K$  上に定義される閉点を与えるが、 $X_N$  の properness から  $\text{Spec } \mathcal{O}_K$  上の点へと lift される) を  $(E, i)$  とし、 $\bar{\zeta} = (\bar{E}, \bar{i})$  を  $k$  上定義される  $X_N$  の special fibre  $\bar{X}_N$  の点 ( $k$  は  $\mathbb{F} = \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}$  の有限次拡大体) とすると、そこにおける完備局所環は

$$k[[X]]$$

の形で表される。従って、admissible 開集合  $\text{sp}^{-1}(\bar{\zeta}) \subset X_N^{R-a}$  は  $k$  の Witt 環  $W = W(k)$ 、そして  $K = W[1/p]$  を使って

$$\text{Max}(W[[X]] \otimes_W K)$$

で表される。  $\text{sp}^{-1}(\bar{\zeta}) \subset X_N^{R-a}$  上の  $X$  によって定義される rigid analytic function を再び  $X$  で表記する時、

$$\nu(\zeta) = \nu(E) = \min\{v_K(X(\zeta)), 1\}$$

によって  $X_N^{R-a}$  上の「overconvergence」を読み取る関数  $\nu$  を定義する。ここで  $v_K$  は  $K$  上の付値 (valuation) で  $v_K(p) = 1$  と normalised されたものとする。 $\nu$  は  $i : \mu_N \hookrightarrow E[N]$  に依存しない。 $X$  はいわば、Eisenstein 級数  $E_{p-1}$  または Hasse invariant<sup>1</sup>  $\text{Ha}$  の (local) lift を  $\zeta$  の近傍に特化したものに他ならないのだが、これを見るには保型曲線が次元であること、また  $E_{p-1}$  と  $\text{Ha}$  が supersingular 点で simple zero を持つことから分かる。同様の議論から  $\nu$  は  $X$  の選び方によらないことが導かれる。従って、

**Lemma 2**  $\nu(E) = 0$  if and only if  $E$  is ordinary,  $0 < \nu(E) < 1$  if and only if  $E$  is supersingular が成り立つ。

また  $\zeta$  が cusp である場合は  $\nu(\zeta) = 0$  と定義する。

さて、ここで  $r$  を  $0 \leq r < 1$  を満たす有理数とする時、 $*$   $\in \{< r, \leq r, = r, \geq r, > r\}$  について

$$X_{N,*}^{R-a}$$

は  $\nu$  が  $*$  を満たすような  $X_N^{R-a}$  の点の admissible 開集合とする。また、 $(E, i)$  を  $X_N$  の non-cuspidal part  $Y_N$  上 universal な組、 $e : X_N \rightarrow E$  でその identity section を表す時、

$$\omega := e^* \Omega_{E/Y_N}$$

<sup>1</sup> $\bar{E}$  上定められる相対 Verschiebung  $V : \bar{E}^{(p)} \rightarrow \bar{E}$  の  $\text{Lie} V : \text{Lie}(\bar{E})^{\otimes p} \simeq \text{Lie}(\bar{E}^{(p)}) \rightarrow \text{Lie}(\bar{E})$  が  $\text{Ha}$  の  $(\bar{E}, \bar{i})$  での値  $\text{Ha}(\bar{E}, \bar{i}) \in H^0(\text{Spec } k, \text{Lie}^V(\bar{E})^{\otimes p} \otimes \text{Lie}(\bar{E})) \simeq H^0(\text{Spec } k, \text{Lie}^V(\bar{E})^{\otimes(p-1)})$  を定める。

で  $Y_N$  上定義される、重さ 1 の「automorphic bundle」を定める。簡単のため、 $\omega$  で  $X_N$  上への延長 (再び line bundle になることに注目したい)、及び  $X_N^{R-a}$  上への analytification を示すことにする。この時、すべての整数  $k \geq 0$  について、 $H^0(X_{N, \leq r}^{R-a}, \omega^{\otimes k}(-\text{cusps}))$  の元を重さ  $k$  の ( $r$ -)overconvergent cuspidal 保型形式と呼ぶ。

## 2 2

Coleman-Mazur による  $GL_2/\mathbb{Q}$ -eigencurve の構成から直ちに導かれるのだが、直接証明することも出来る。

$\rho$  はその  $D_p$ -表現が不分岐指標  $\alpha$  と  $\beta$  の直和であった。そこで

$$T(\bar{\rho}, \alpha) \simeq R(\bar{\rho}, \alpha) \xrightarrow{p} \mathcal{O}$$

から

- $Np$  と素である素数  $Q$  について
  - $T_Q f_\alpha = \rho(\text{Frob}_Q) f_\alpha$ ,
  - $QS_Q f_\alpha = \det \rho(\text{Frob}_Q) f_\alpha$
- $Q|N$  である素数  $Q$  について  $T_Q f_\alpha = 0$  (正確には、必要ならばこれが成り立つ様に  $N$  を  $p$  と素であるまま増加させ、 $Q$ -new なものを取っている)
- $U_p f_\alpha = \alpha(\text{Frob}_p) f_\alpha$

を満たす overconvergent 固有 cuspidal 保型形式  $f_\alpha$  を得る。証明の概要は次のようである。

すべての整数  $k \geq 1$  について

$$S_k^0(N) := H^0(X_{N,=0}^{R-a}, \omega^{\otimes k}(-\text{cusps})),$$

$0 < r < p/(p+1)$  を満たす全ての有理数  $r$  について

$$S_k(N, r) := H^0(X_{N, \leq r}^{R-a}, \omega^{\otimes k}(-\text{cusps})),$$

$$S_k(N) := H^0(X_N^{R-a}, \omega^{\otimes k}(-\text{cusps}))$$

とする。これらはそれぞれ  $p$ -進 cuspidal 保型形式、 $p$ -進  $r$ -overconvergent cuspidal 保型形式、古典的 (classical) cuspidal 保型形式の  $L$  上ベクトル空間である。その定義から、

$$S_k(N) \subset S_k(N, r) \subset S_k^0(N)$$

が成り立っている。また、この包含関係は Hecke equivariant である。次に Hida Hecke  $\Lambda$  代数  $h = h(N)$  を用いて、

$$S^0(N) := \text{Hom}_\Lambda(h, \Lambda)$$

とする。これは  $\Lambda$ -adic forms の  $\Lambda$ -加群である。また整数  $k$  について  $S^0(N)[k]$  を  $S^0(N)$  の部分加群で

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \hookrightarrow (\mathbb{Z}/Np\mathbb{Z})^\times \hookrightarrow \Lambda \xrightarrow{\langle \cdot \rangle} h \xrightarrow{F} \Lambda$$

が  $\zeta \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$  を  $\zeta^{k-2}$  に送る  $\Lambda$ -adic form  $F$  の集合だとする。

次はすでに分かっているものとする。

- 肥田理論の主定理:  $e$  を Hida idempotent とする。

- $\chi : \mathbb{Z}_p^\times \times (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \rightarrow \overline{\mathbb{Z}}_p^\times$  を有限指標で、その  $(1+p\mathbb{Z}_p)$  への制限が conductor  $p^r$  であると仮定すると ( $\zeta$  を  $u$  の  $\chi$  による像とすると必然的に  $\zeta^{p^r} = 1$  であり、 $\chi$  は  $(\mathbb{Z}/Np^{r+1}\mathbb{Z})^\times$  の指標を定義する)、

$$(h \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\chi]) / (u - (1+p)^{k-2}\zeta) \simeq eh_k(\Gamma_1(Np^{r+1}); \chi)$$

が成り立つ。

- 写像

$$F \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} (F(T_n) \bmod (u - (1+p)^{k-2})) q^n$$

によって、同型

$$S^0(N)[k] / (u - (1+p)^{k-2}) \otimes \mathbb{C}_p \simeq eS_k^0(N)$$

が成り立つ。

- $U_p$  は  $S_k(N, r)$  に completely continuously に作用する。
- $S_k^0(N)$  上にも  $e$  は作用する。
- $S_k^0(N)$  上に

$$\|f\| = \left\| \sum_{n \geq 1} c_n(f) q^n \right\| = \sup_{n \geq 1} |c_n(f)|$$

で定められるノルムについて  $S_k^0(N)$  は Banach 空間を成す。

**Lemma 3**  $eS_k^0(N) \subset S_k(N, r)$ 、すなわち、 $p$ -進 cuspidal 保型形式の  $k$  への specialisation は overconvergent cuspidal 保型形式を定義する。

*Proof.*  $F$  を  $eS_k^0(N)$  の元とする。すると  $eS_{k+p^n(p-1)}^0(N)$  の元  $F_n$  で、その Banach ノルムについて  $n \rightarrow \infty$  の時  $F$  に収束するような  $p$  進 cuspidal 保型形式の列  $\{F_n\}$  を取ることが出来る。例えば  $E_{p-1}$  を重さ  $p-1$  の Eisenstein 級数とすれば  $F_n = e(FE_{p-1}^{p^n})$  は条件を満たす。

肥田理論により、 $n$  が十分大きな時 (より厳密には  $k + p^n(p-1) \geq 2$  が成り立つ時)

$$eS_{k+p^n(p-1)}^0(N) \subset S_{k+p^n(p-1)}(N)$$

が成り立ち、従って  $F_n$  は classical である。だが一方で、定義から

$$S_{k+p^n(p-1)}(N) \subset S_{k+p^n(p-1)}(N, r)$$

となるので十分大きな  $n$  の時  $F_n$  は  $S_{k+p^n(p-1)}(N, r)$  の元を成す。

ここで  $e$  を  $eS_k(N, r)$  を有限に、 $(1-e)S_k(N, r)$  において  $U_p$  が topologically nilpotent になるように定める (Serre の  $p$ -adic Banach space 理論)  $S_k(N, r)$  上に定められる作用素とすると ( $S_k^0(N)$  における Hida idempotent を  $S_k(N, r)$  に制限した時、Serre の idempotent  $e$  と一致する)、そういった  $n$  について

$$e(F_n/E_{p-1}^{p^n})$$

は  $eS_k(N, r)$  の元を成し<sup>2</sup>、 $eS_k(N, r)$  が有限であることから、 $e(F_n/E_{p-1}^{p^n})$  の収束元である  $F$  は  $eS_k(N, r)$  の元を成す。□

同様に  $\alpha$  を  $\beta$  で置き換えた  $f_\beta$  も構成できる。重要なのは、 $\alpha$  と  $\beta$  が異なり、 $f_\alpha$  と  $f_\beta$  はそれを除けばすべての固有値が等しい固有 overconvergent 保型形式であることである。そもそも、pre-Kisin では  $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$  のケースに  $R(\bar{\rho})$  を構成することさえ出来なかった。 $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$  のケースは最近の私の仕事 [11] (Taylor の unpublished letter に基づいている) で扱われている。より深くこの考察を本質的に理解するには、Gross/Coleman-Voloch による companion forms についての理解が必要である。余談だが、Gee 等による Buzzard-Diamond-Jarvis 予想の証明の根本にはこの companion forms の概念が本質的に関わっている。

<sup>2</sup> $E_{p-1}$  が  $X_{N,0}^{R-a}$  上だけでなく  $X_{N,\leq r}^{R-a}$  上でも non-zero であることを使っている。

### 3 3

$X_{Iw,N}$  を  $\mathbb{Z}_p$  上定義される

- $\mathbb{Z}_p$ -スキーム上定義された楕円曲線  $E$
- Iwahori レベル構造、すなわち有限平坦群スキーム  $C \subset E[p]$  で  $|C| = p$  (自然に isotrivial, i.e.,  $C$  の  $E[p] \simeq E[p]^\vee$  による像が  $(E[p]/C)^\vee$  と同型である)
- 群スキーム射  $i: \mu_N \hookrightarrow E[N]$

の組を閉点を持つ modular curve の compactification とし、その Raynaud generic fibre を  $X = X_{Iw,N}^{R-a}$  とする。

$$(E, i, C) \mapsto (E, i)$$

で定義される射を  $q: X_{Iw,N} \rightarrow X_N$  とする。また

$$(E, i, C) \mapsto (E, i \bmod C, E[p]/C)$$

で定義される射を  $w: X_{Iw,N} \rightarrow X_{Iw,N}$  とする。

$X = X_{Iw,N}^{R-a}$  上には、その  $p$ -進幾何を見て取れるような関数  $\nu$  で次を満たすものが存在する。

- $E$  が ordinary で  $C$  が multiplicative の時  $\nu(E, C) = 0$ 、 $E$  が ordinary で  $C$  が étale の時  $\nu(E, C) = 1$ 、 $E$  が supersingular の時  $0 < \nu(E, C) < 1$ 。
- $\nu(E, C) + \nu(E/C, E[p]/C) = 1$ 。

この  $\nu$  は幾通りかの構成方法がある。

(degree):  $K$  を  $L$  の有限次拡大体、 $\mathcal{O}_K$  をその整数環とする。  $C$  を  $\mathcal{O}_K$  上定義された有限 flat 群スキームとする時、Oort-Tate, Raynaud 等の仕事から  $C$  の cotangent sheaf が  $\mathcal{O}_K/\gamma\mathcal{O}_K$  の形で表せる ( $C$  の Cartier-dual の cotangent sheaf は  $\mathcal{O}_K/\delta\mathcal{O}_K$  で  $\gamma\delta = w_p$ )。ここで  $K$  の付値で  $v_K(p) = 1$  となるようなものを取った時、 $\nu$  を対応する  $C$  の  $1 - v_K(\gamma) = v_K(\delta)$  と定める。

正確にはこの定義は 'pointwise' のみなので 'family' でも有効な定義が必要となる。これには universal な  $C$  の cotangent sheaf  $\omega_C$  を取り、その Fitting ideal の生成元の (1-)valuation を見る。

(local coordinate): ここで  $\xi$  を  $X_{Iw,N}^{R-a}$  の non-cuspidal な点、またそれによって  $\mathcal{O}_K$  上定義される  $X_{Iw,N}$  の閉点を  $(E, C, i)$  とし、 $\bar{\xi} = (\bar{E}, \bar{C}, \bar{i})$  を  $k$  上定義される  $X_{Iw,N}$  の special fibre  $\bar{X}_{Iw,N}$  の点 ( $k$  は  $\mathbb{F}$  の有限次拡大体) とすると、そこにおける完備局所環は

$$k[[X, Y]]/(XY)$$

の形で表される。従って、admissible 開集合  $\text{sp}^{-1}(\bar{\xi}) \subset X_N^{R-a}$  は  $k$  の Witt 環  $W = W(k)$ 、そして  $K = W[1/p]$  を使って

$$\text{Max}(W[[XY]]/(XY - p) \otimes_W K)$$

で表される。ここで  $X = 0 \Leftrightarrow \text{Lie}(C^\vee) \neq 0 \Rightarrow \text{Lie}(C) = 0 \Leftrightarrow \bar{C} = \ker(V: E \rightarrow E^{(1/p)})$ 、また  $Y = 0 \Leftrightarrow \text{Lie}(C) \neq 0 \Rightarrow \text{Lie}(C^\vee) = 0 \Leftrightarrow \bar{C} = \ker(F)$  となるようにパラメーター  $X, Y$  を選んでいる。幾何的にこれを見ると、 $\text{sp}^{-1}(\bar{\xi})$  は annulus になっているのが分かる (Iwahori レベル付きではない時には disc であったことを思い出してほしい)。

ここで  $E$  が ordinary で  $C$  が multiplicative (resp. étale) な時  $\nu(E, C) = 0$  (resp.  $\nu(E, C) = 1$ )、また  $E$  が supersingular な場合

$$\nu(\xi) = \nu(E, C) = \min\{v_K(X(\xi)), 1\}$$

によって  $X_{Iw,N}^{R-a}$  上の「overconvergence」を読み取る関数  $\nu$  を定義する。ここで  $v_K$  は  $K$  上の付値 (valuation) で  $v_K(p) = 1$  と normalised されたものとする。

両者が同じ値をとることは練習問題としておく。

まず、'analytic continuation' と呼ばれるテクニックについて解説したい。スローガンは次のようである。

$U \subset V$  を rigid analytic modular curve  $X = X_{Iw,N}^{R-a}$  の 'connected ordinary locus'<sup>3</sup>を含む connected な admissible 開集合で、 $(E, C)$  が  $V$  上の non-cuspidal な点を定義するとき、もし  $C$  と異なるすべての Raynaud 平坦部分群スキーム  $D \subset E[p]$  について  $(E/D, (C+D)/D)$  が  $U$  上の non-cuspidal な点を与える、という条件によって特徴づけられているものとする。

すると、もし  $f$  が  $U$  上の  $U_p$ -eigenfunction で、その固有値  $\alpha$  が non-zero であった時、 $V$  上の function  $U_p(f)/\alpha$ 、即ちその  $(E, C)$  での値が

$$(1/p) \sum_D f(E/D, (C+D)/D)$$

となるような function へと延長できることが見て取れる。この  $U, V$  を  $\nu$  を使って特徴づけることができることに注目したのが Buzzard(-Taylor) [2] である。突き詰めれば、 $(E, C)$  を  $X$  に取った時に、 $C$  と異なるすべての  $D \subset E[p]$  について

$$\nu(E/D, (C+D)/D) < \nu(E, C)$$

が成り立っている限り、これを満たす  $(E, C)$  の存在する領域まで、non-zero 固有値を持つ overconvergent  $U_p$ -eigenform を絶えず延長させることが可能なことを見て取れる。

前のセクションでそういった  $f$  が (いくつか) 構成できていたのだから、では  $X$  のどこで  $\nu$  についての不等式が成り立ち、一方どこでそれが成り立たないかを知るのはとても有益なことである。

**Lemma 4**  $\nu(E, C) = \nu(E/D, E[p]/D)$  if and only if  $\nu(E, C) = 0, 1$ .

即ち、supersingular annuli の「端」まで  $U_p$ -eigenfunction が延長できることを示唆している。非常に便利な補題に見えるが、これを応用するには若干の注意が必要である。

これは有限群スキーム理論を使って証明出来るが、BT は Katz の canonical subgroup 理論を使って  $\nu(E, C) < p/(p+1)$  までには「イコール」が成り立たないことを示している。証明は次の様である。

まず

**Lemma 5**  $\xi$  を  $X_{Iw,N}^{R-a}$  上の non-cuspidal な点、 $\zeta$  を  $\xi$  の  $q: X_{Iw,N}^{R-a} \rightarrow X_N^{R-a}$  による像 (再び non-cuspidal) とする。この時、

- If  $\nu(\xi) < p/(p+1)$ ,

$$\nu(\zeta) = \nu(\xi);$$

- if  $\nu(\xi) > p/(p+1)$ ,

$$\nu(\zeta) = p(1 - \nu(\xi)).$$

を証明する。Lemma の証明には Lubin による (1次元) 形式群論を使う方法 ([13]) と、mod  $p$  幾何 ([6]) を使う 2通りがある。Appendix に前者を紹介している。

この Lemma と Katz(-Lubin) canonical subgroup theorem を組み合わせて次が証明できる。

**Proposition 6**  $n$  を non-negative な整数とし、もし  $(E, C)$  が  $\nu(E, C) \leq 1 - p/p^n(p+1)$  を満たし、 $D$  が  $C$  と異なる  $E[p]$  の任意の Raynaud 有限平坦部分群スキームであるならば、 $(E/D, (C+D)/D)$  は  $\nu(E/D, (C+D)/D) \leq 1 - p/p^{n-1}(p+1)$  を満たす。

*Proof.* Case by case for  $C = H$  or  $C \neq H$ .  $\square$

こういった Proposition から、 $(X_N^{R-a}$  上ではなく)  $X_{Iw,N}^{R-a}$  上の  $\nu$ こそが moduli のより本質的な「overconvergence」を読み取っているのだ、と理解したい。これは、Coleman, Gouvea 等の 90年代の

<sup>3</sup> $E$  (resp.  $C$ ) の geometric special fibre が ordinary (resp. 群スキーム  $\mu_p$  と同型) となる点  $(E, C)$  からなる  $X$  の admissible 開集合。



仕事に見られる態度とは少々異なっているのだが、この視点の変換こそが、その後の  $p$ -進/古典保型形式理論の急速な発展 (Coleman の定理の一般化など) への礎となっている。これを提唱したのが Buzzard [2] である。Bijakowski-Pilloni-Stroh [1] は、このアイデアを PEL 志村多様体上定義される holomorphic/geometric  $p$ -進保型形式に一般化させたものである。

一方、degree (= 1 – Fargue’s degree) を使った別の証明も紹介したい。まず

**Proposition 7** (Corollaire 3, [5])  $C$  と  $G$  を  $\mathcal{O}_K$  上定義された order  $p$  の有限平坦群スキームとする。また写像  $f : C \rightarrow G$  が与えられ、その  $f[1/p] : C[1/p] \rightarrow G[1/p]$  は  $K$  上同型であると仮定する。この時、

$$\deg(C) \geq \deg(G)$$

が常に成立し、 $\deg(C) = \deg(G)$  if and only if  $f$  is an isomorphism.

が知られている。

ここで上命題を  $C \rightarrow (C + D)/D$  ( $D$  は  $C$  と異なる  $E[p]$  の有限平坦部分群スキームであった。また  $(C + D)/D$  は  $C$  の、 $E[p]/D$  での像の schematic closure として定義されている) に適用すると、 $\nu(E, C) = \nu(E/D, (C + D)/D)$  であることと  $C \simeq (C + D)/D$  であることが「if and only if」であり、一方後者は  $E[p]$  が  $\mathcal{O}_K$  上で  $D \times (C + D)/D$  に split していることを示す。order  $p$  の有限平坦群スキームの分類 (例えば、Dieudonné 理論から従う) から、これは  $E$  が ordinary である時に限る (必然的に  $\deg(E) = 0, 1$ )。

さて前セクションからそのガロア表現がどちらも  $\rho$  と同型となるような、overconvergent な固有保型形式  $f_\alpha, f_\beta$  が存在することが分かった。また、前述の ‘analytic continuation’ の話から、 $f_\alpha, f_\beta$  は  $H^0(X_{<1}, \omega)$  の元であることが分かった。次に  $f_\alpha, f_\beta$  を貼り合わせる方法について解説したい。

まず、

$$\begin{aligned} F &= \alpha f_\alpha - \beta f_\beta, \\ G &= f_\alpha - f_\beta \end{aligned}$$

とする。

次の補題 (その証明はすでに説明されている) は  $X = X_{Iw, N}^{R-a}$  上で貼り合わさった overconvergent form が  $p$ -old であること、すなわちそれが  $X_N^{R-a}$  に descent することを証明するのに必要となる。

**Lemma 8** If  $(E, C)$  is a point satisfying  $\nu(E, C) \in (0, 1)$ , then  $\nu(E, D) \in (0, 1)$ .

$Z_{Iw, N}$  を  $\mathbb{Q}_p$  上定義され、その閉点が  $(E, C, i, D)$ :

- $(E, C, i)$  は  $X_{Iw, N}[1/p]$  の閉点を定義し、
- $D \subset E[p]$  は  $C$  と異なる  $|D| = p$  なる有限平坦群スキーム (必然的に étale)

を定める保型曲線 (の compactification) とし、 $Z_{Iw, N, T-a}$  をその Tate rigid analytic  $\mathbb{Q}_p$ -space とする。

$$q_1 : (E, i, C, D) \mapsto (E, i, C),$$

$$q_2 : (E, i, C, D) \mapsto (E/D, i \bmod D, E[p]/D)$$

で  $q_1, q_2 : Z_{Iw, N} \rightarrow X_{Iw, N}$  を定める。

また、 $\omega_X$  を、 $X_N^{R-a}$  上の automorphic bundle  $\omega$  と全く同様に定義される  $X = X_{N, Iw}^{R-a}$  上の weight 1 automorphic bundle とする。

**Lemma 9**  $\phi$  を  $Z_{Iw, N, T-a}$  上の直線束についての自然な写像  $q_{2, T-a}^* \omega_X \rightarrow q_{1, T-a}^* \omega_X$  と定義し、 $X(0, 1)$  で  $0 < \nu(\xi) < 1$  を満たす  $X$  上の閉点  $\xi$  の集合とし定義される  $X$  の admissible 開集合とする時、

$$q_{1, T-a}^* F = \phi^* q_{2, T-a}^* G$$

が  $q^{-1}(X(0, 1)) \subset Z_{Iw, N, T-a}$  上で成り立つ。

*Proof.*  $Z_{1w,N,T-a}$  上での  $q$ -expansion の計算。□

$U \subset X$  を任意の admissible 開集合とする時、

$$w : H^0(U, \omega_X^{\otimes k}) \longrightarrow H^0(w(U), \omega_X^{\otimes k})$$

を  $w(f) = \varphi^* w^*(f)$  で定義する。ここで  $\varphi$  は isogeny  $E \rightarrow E/C$  によって自然に定められる  $X$  上の直線束の写像  $q_2^* \omega^{\otimes k} \rightarrow q_1^* \omega^{\otimes k}$  を指す。

**Corollary 10**  $(E, C)$  を  $X(0, 1)$  上の点、 $D \subset E[p]$  を  $C$  と異なる Raynaud 有限平坦部分群スキームとする。このとき、 $(E, C, D)$  は  $q_{1,T-a}^{-1}(X(0, 1))$  の元を成し、

$$F(E, C) = q_{1,T-a}^* F(E, C, D) = \phi^* q_{2,T-a}^* G(E, C, D) = \phi^* G(E/D, (C+D)/D) = w(G)(E, D)$$

が成り立つ。

したがって、 $F(E, C)$  は  $C$  に依存しない、すなわち、 $(E, C)$  が  $X(0, 1)$  の点である限り、全ての点  $(E, D) \in q^{-1}(q(E, C)) = q^{-1}(E) \subset X(0, 1)$  について  $F(E, C) = F(E, D)$  が成り立つ。これは上 Corollary から従う。

また Lemma 9 から次が直ちに従う。

**Theorem 11**  $F$  と  $w(G)$  が  $X(0, 1)$  で貼り合わさって、 $H^0(X_{1w,N}^{R-a}, \omega)$  の元をなす。

この元の  $X_N^{R-a}$  への push-forward、より厳密には degree  $p+1$  の cover  $X_{1w,N}^{R-a} \rightarrow X_N^{R-a}$  についての descent、こそが厳密な意味での  $\rho$  に対応する重さ 1 の classical modular eigenform である。

$$q_* : H^0(X, \omega) \rightarrow H^0(X_N^{R-a}, \omega)$$

を trace とすれば、 $q_* q^*(f) = (1+p)f$  が成り立っている。

ここで  $f = q_* F$  とすると  $q^* f = (1+p)F$  が成り立つことが、 $X(0, 1)$  上の等式

$$(q^* f)(E, C) = (q^* q_* F)(E, C) = \sum_{(E,D) \in q^{-1}(E)} F(E, D) = (1+p)F(E, C)$$

から導かれる。

## 4 Appendix: Canonical subgroups

$E$  を  $\mathcal{O}_K$  上の楕円曲線、 $\hat{E}$  を  $E$  の (1次元) 形式群 ( $E$  の identity についての形式完備化) とする。 $E$  の canonical subgroup  $H \subset E[p]$  とは

- (Katz-Lubin)  $\hat{E}(\bar{K})$  内の、原点とそれに  $p$ -進的に最も近い  $(p-1)$  個の点を  $\bar{K}$ -点として持つ  $\hat{E}(\bar{K})[p] = E[p]$  の位数  $p$  部分群  $H$  を指す (Newton polygon を使って ' $\hat{E}(\bar{K})[p]$  の方程式' を解く)、
- もしくは、その special fibre が  $E \times_{\mathcal{O}_K} k$  についての相対 Frobenius の kernel と一致するような、 $E[p]$  の唯一の位数  $p$  部分群  $H$

と定義することが出来る。Canonical subgroup theorem は次のようである。

**Theorem 12** (Katz-Lubin [7])

- If  $\nu(E) < p/(p+1)$ , then the canonical subgroup  $H = H(E)$  exists.

簡単な為、 $\nu(E) < p/(p+1)$  が成り立つ時、 $E$  は not too supersingular であるということにする。

- If  $\nu(E) = 0$ , then  $H$  is the étale subgroup of  $E[p]$ .
- If  $\nu(E) < 1/(p+1)$ , then  $E/H$  is not too supersingular and  $\nu(E/H) = p\nu(E)$ .

- If  $\nu(E) = 1/(p+1)$ , then  $E/H$  is too supersingular.
- If  $1/(p+1) < \nu(E) < p/(p+1)$ , then  $E/H$  is not too supersingular,  $\nu(E/H) = 1 - \nu(E)$  and the canonical subgroup of  $E/H$  is  $E[p]/H$ .
- If  $\nu(E) < p/(p+1)$  and  $D \neq H$ , then  $\nu(E/D) = \nu(E)/p$  and the canonical subgroup of  $E/C$  is  $E[p]/C$ .
- If  $\nu(E) \geq p/(p+1)$ , then  $C$  is a subgroup of  $E[p]$  of order  $p$ ,  $\nu(E/C) = 1/(p+1)$  and the canonical subgroup of  $E/C$  is  $E[p]/C$ .

**Lemma 13** ▪  $C$  が canonical subgroup である時、 $\nu(E, C) = \nu(E)$  が成り立つ。

- $C \subset E[p]$  もしくは  $E[p]/C \subset (E/C)[p]$  の少なくとも一つは canonical subgroup である。

**Remark.**  $\nu(E, C) + \nu(E/C, E[p]/C) = 1$  が常に成り立っていることを思い出して欲しい。

*Proof.* 最初の命題は [10] に証明されている。証明の大筋は次のようである。Katz による canonical subgroup の定義/構成 (Theorem 3.1.7 [7]) から、原点以外の  $(p-1)$  個の点  $P$  は  $\nu(P) = (1-\nu(E))/(p-1)$  の  $\bar{K}$ -valuation を持つ。一方、例えば Lubin による 1 次元形式群についての結果 (Lemma 1.3 [8]) から  $\nu(E, C) = 1 - \sum \nu(P)$  (和は前述の  $(p-1)$  個の点を走る) が分かる。二つを組み合わせれば良い。

二つ目の命題を証明したい。どちらも canonical でないとする。もし  $\nu(E) < p/(p+1)$  が成り立っているならば canonical subgroup theorem から  $E[p]/C \subset (E/C)[p]$  が canonical であることになってしまうので  $\nu(E) \geq p/(p+1)$  が成り立つはずである。しかしこの時、再び canonical subgroup theorem から  $E[p]/C \subset (E/C)[p]$  が canonical であることになり、矛盾する。□

この Lemma を使って、Lemma 5 を証明したい。

(Lemma 5 の証明): まず  $\nu(E) < p/(p+1)$  を仮定する。もし、 $C$  が canonical である時、上 Lemma から  $\nu(E) = \nu(E, C)$  が従う。一方  $C$  が canonical でない場合、同 Lemma から  $E[p]/C \subset (E/C)[p]$  が canonical である。従って、 $1 - \nu(E, C) = \nu(E/C, E[p]/C) = \nu(E/C) = \nu(E)/p$  (最後の等式は上 canonical subgroup theorem より従う) であり、 $\nu(E) = p(1 - \nu(E, C))$  が導ける。

次に  $\nu(E) \geq p/(p+1)$  を仮定すると、canonical subgroup theorem より  $E[p]/C \subset (E/C)[p]$  が canonical であるので、直前のケースと同様に  $1 - \nu(E, C) = \nu(E/C)$  が導ける。しかしこの場合 canonical subgroup theorem から  $\nu(E/C) = 1/(p+1)$ 、即ち  $\nu(E, C) = p/(p+1)$  を導ける。□

単なる言い換えに過ぎないのだが、次が成り立つ。

**Proposition 14** ▪  $\nu(E, C) < p/(p+1)$  の時  $C$  は canonical である。

- $\nu(E, C) > p/(p+1)$  の時  $C$  は canonical ではない。

*Proof.*  $\nu(E, C) < p/(p+1)$  を仮定する。もし  $C$  が canonical でないとすると  $E[p]/C \subset (E/C)[p]$  が canonical であるので、 $1 - \nu(E, C) = \nu(E/C)$  が成り立つ。もし  $\nu(E) < p/(p+1)$  ならば、 $\nu(E/C) = \nu(E)/p$  であり、 $\nu(E, C) > p/(p+1)$  が成り立つしてしまう。一方  $\nu(E) \geq p/(p+1)$  ならば  $\nu(E/C) = p/(p+1)$  であり、従って  $\nu(E, C) = p/(p+1)$  が成り立ち、同様に矛盾する。

次に  $\nu(E, C) > p/(p+1)$  を仮定する。もし  $C$  が canonical であるとする  $p/(p+1) < \nu(E, C) = \nu(E)$  から canonical subgroup の存在性に矛盾する。□

## 5 Going beyond BT

筆者の最近の仕事 [11], [12] で次が証明されている。

**Theorem 15**  $p$  を素数とする ( $p=2$  も許される)。 $L$  を  $\mathbb{Q}_p$  の有限次拡大体、 $\mathcal{O}$  をその整数環、 $\mathfrak{m}$  を極大イデアル、 $\mathbb{F}$  を剰余体とする。 $F$  を総実体、

$$\rho: \text{Gal}(\bar{F}/F) \rightarrow \text{GL}_2(\mathcal{O})$$

を連続既約 2 次元  $p$ -進表現とし、次を仮定する。

- $\rho$  は *totally odd* である。
- $\rho$  は有限個の素点を除いては不分岐である。
- $\bar{\rho} = (\rho \bmod \varpi) : \text{Gal}(\bar{F}/F) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{F})$  は *absolutely irreducible* であるが「*badly dihedral*」ではないと仮定する。
- $\bar{\rho}$  が *\*ordinary\* modular* である。
- すべての  $p$  上の素点における *inertia group* (惰性群) の、 $\rho$  による像が有限である。

このとき、重さ 1 の *Hilbert cuspidal* 固有保型形式が存在し、それに対応するガロア表現 (Rogawski-Tunnell, Wiles) が  $\rho$  と一致する。

上述の  $\bar{\rho}$  が *badly dihedral* でない、とは次の条件を指す。まず  $p$  が *odd* であると仮定する。また  $F^+$  を、 $F(\zeta_p)$  内の  $F$  の 2 次元拡大体とする (そういった  $F^+$  は唯一に存在する)。その時、 $\bar{\rho}$  が *badly dihedral* でない、とは特に  $F^+$  は  $F$  の総虚 2 次拡大で、かつ  $\bar{\rho}$  が  $F^+$  からの誘導表現であった場合に、 $p$  は  $F^+$  で完全分岐することはない、と要求するものである。また  $p=2$  の時、 $\bar{\rho}$  が *badly dihedral* でない、とは特に  $\bar{\rho}$  が  $F$  の 2 次総虚拡大  $F^+$  からの誘導表現であった場合、2 は  $F^+$  で完全分岐することはない、と要求するものである。

$\bar{\rho}$  が可約のケースも上定理のような *modularity* が証明できる [12]。

定理の系として

**Theorem 16** 上定理の  $p$ -進表現  $\rho$  について *Fontaine-Mazur* 予想が成り立つ。

*Proof.* Rogawski-Tunnell による重さ 1 の、*Hilbert cuspidal* 固有保型形式に付随するガロア表現の有限性から従う。□

**Theorem 17**  $\rho : \text{Gal}(\bar{F}/F) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{C})$  を *totally odd* な既約連続 2 次元複素表現とする時、 $\rho$  についての強 *Artin/Artin-Langlands* 予想は正しい。

現在私は、無限素点で *limit of discrete series* を持つような (connected) reductive group  $G$  の保型表現 ( $G$  は必ずしも  $\text{GL}_{2/F}$  でない) について「*Buzzard-Taylor* のアイデア」は応用できるのか (ナイーブなアプローチでは無理なことはすぐに分かる。) ? また  $\bar{\rho}$  が *ordinary modular* ではないケースはどうすべきなのか? などの至って自然な疑問についての研究 (一部共同研究) をしている。

一方、(少なくとも筆者には) どこから手をつけていいか分からないケースもある。例えば  $\bar{\rho}$  が *badly dihedral* のケース ( $F = \mathbb{Q}$  でも未解決) では、*Taylor-Wiles* の議論を使って  $R = T$  を証明することが出来そうにない ( $\rho$  が  $F^+$  から誘導されている場合には類体論より簡単に  $\rho$  の *modularity* が示せる)。参加者の方で、もし何か思いついたことがあったらぜひ教えていただきたい (shu.sasaki@gmail.com)。

## References

- [1] Bijakowski-Pilloni-Stroh, *Classicit  de formes modulaires surconvergentes*, *Annals of Math.* 149 (2016), 975-1014.
- [2] K.Buzzard, *Analytic continuation of overconvergent eigenforms*, *J. Amer. Math. Soc.* 16 (2003), 29-55.
- [3] K.Buzzard & R.Taylor, *Companion forms and weight one forms*, *Annals of Math.* 149 (1999), 905-919.
- [4] K.Buzzard, M.Dickinson, N.Shepherd-Barron & R.Taylor, *On icosahedral Artin representations*, *Duke Math. J.* 109 (2001), 283-318.
- [5] L.Fargues, *La filtration de Harder-Narasimhan des sch mas en groupes finis et plats*, *J. Reine Angew. Math.* 645 (2010), 1-39.
- [6] P.Kassaei, *Modularity lifting in parallel weight one*, *J. Amer. Math. Soc.* 26 (2013), 199-225.

- [7] N.Katz, *p-adic properties of modular schemes and modular forms*, LNM 350, Springer-Verlag (1973), 69-170.
- [8] J.Lubin, *Finite subgroups and isogenies of one-parameter formal Lie groups*, Annals of Math. 85 (1967), 296-302.
- [9] Pilloni-Stroh, *Surconvergence et classicité: le cas Hilbert*, pre-print.
- [10] S.Sasaki, *On Artin representations and nearly ordinary Hecke algebras over totally real fields*, Documenta Mathematica 18 (2013), 997-1038.
- [11] S.Sasaki, *Integral models of Hilbert modular varieties in the ramified case, deformations of modular Galois representations, and weight one forms*, Invent. Math. 215 (2019) 171-264.
- [12] S.Sasaki, *Integral models of Hilbert modular varieties in the ramified case, deformations of modular Galois representations, and weight one forms II*, submitted.
- [13] S.Sasaki, *Analytic continuation of overconvergent Hilbert eigenforms in the totally split case*, Comp. Math. 146 (2010), 541-560.